

## MATHEMATICAL MODELING OF OPERATING ROOMS OCCUPANCY PROBLEM

## MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE OCUPACIÓN DE QUIRÓFANOS

Ing. Natalia Patiño C., Ing. Maria P. Moreno J., MSc. Eliana M. Toro Ocampo

Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ingeniería Industrial.  
La Julita, Pereira, Risaralda, Colombia. Tel.: +57-6-3137 205.  
E-mail: mapis834@hotmail.com, npatcar@gmail.com, elianam@utp.edu.co

**Abstract:** In this article is presented an integer linear model with an objective function for maximizing the usage of operation rooms (O.R.). The model arises after applying a proposed technique using the Six Sigma DMAIC approach that allows the review of the process in order to identify situations that can be improved. Based on the mentioned technique, different problems arise, having the occupation level of the operation rooms as the most important issue, with which is possible identify the vulnerable elements of the process, and based on statistical tools the values of the parameters that must be considered in order to build the model, are determined. The solution technique used to solve the model is the Branch and Bound algorithm with the CPLEX solver.

**Keywords:** Branch and Bound Algorithm, Integer linear programming, SIX SIGMA operations rooms occupancy, optimizing

**Resumen:** En este artículo se plantea un modelo matemático lineal entero cuyo objetivo es maximizar la utilización de quirófanos en instituciones hospitalarias. El modelo matemático surge después de aplicar una técnica que se propone con el enfoque de Six Sigma DMAIC que permite revisar procesos para identificar situaciones que deben ser mejoradas. Con base en ello surgen diferentes problemáticas pero aparece como punto neurálgico el nivel de ocupación de la sala de quirófanos, allí se identifican los elementos vulnerables en el proceso y con base en herramientas estadísticas se determinan los valores de los parámetros que se deben considerar para plantear el modelo matemático. La técnica de solución utilizada para resolver el modelo es el algoritmo de *Branch and Bound* con el solver CPLEX.

**Palabras clave:** Algoritmo de Branch and Bound, Optimización, Programación lineal entera, SIX SIGMA, utilización de quirófanos

### 1. INTRODUCCIÓN

El término productividad es un concepto que se utiliza en las empresas y organizaciones para contribuir a la mejora mediante el estudio y discusión de los factores determinantes que intervienen en la misma.

La productividad se define como el número de actividades realizadas por unidad de recurso

existente en un tiempo dado. En un ambiente hospitalario tal eficiencia podría medirse por ejemplo con las consultas por hora médico, el número de egresos por cama, las placas radiológicas por día, etc. Con base en ello se define lo deseable para desarrollar planes o justificar recursos.

Del mismo modo las instituciones de salud, en su búsqueda por mejorar tanto su productividad como

su eficiencia, recurren a la realización de una serie de estudios, los cuales tienen como finalidad identificar las oportunidades de mejora en sus procesos. En este artículo, se muestra una técnica que permita revisar el análisis de ocupación de los quirófanos y con base en él se diseña un modelo de programación matemática que permita optimizar la utilización de los mismos.

Nepote *et al.* (2009) analizan la dinámica de las salas de operaciones a través de índices operacionales que miden la optimización, la resistencia, la sobrecarga y la utilización de la unidad quirúrgica. Los índices operacionales se calcularon utilizando los tiempos registrados en las listas de ingreso al hospital, archivos de pacientes, entre otros datos. Se utiliza un modelo de regresión lineal, con base en él se selecciona el conjunto de variables independientes que contribuyen a la variación del resultado. Este es un estudio prospectivo que se llevó a cabo en un hospital terciario y privado en una ciudad en el interior de Sao Paulo, Brasil.

Debido a que en los últimos años la financiación de los hospitales ha pasado de un presupuesto orientado al sistema (suma global) a un sistema de pago por servicio como plantean Folmer y Mor (2003), se ha generado la necesidad de mejorar y motivar a los hospitales en el aumento de la productividad y la eficiencia.

Hincapié *et al.* (2004) aplican las cadenas de Markov para pronosticar el comportamiento en el egreso de pacientes después de ser ingresado por el servicio de urgencias. Se obtuvo un análisis de sensibilidad con el fin de determinar el tiempo promedio de permanencia de los pacientes en el servicio de cirugía.

Chacon *et al.* (2010) realizan una investigación de productividad y eficiencia del servicio de salud médico -odontológico al interior de la universidad del Zulia. La medición se hace con base en una muestra de pacientes que califican el servicio.

Vanberkel, P.T. *et al.* (2011) abordan un problema de ocupación hospitalaria donde se desea obtener la mejor mezcla GRD (grupos relacionados de diagnóstico) de mayor beneficio para el hospital. Se utiliza la programación por metas y se consideran restricciones tales como estancias disponibles, tiempo de quirófano total, tiempo del personal médico disponible por cada especialidad, entre otras; plantean adicionalmente la llegada de pacientes de forma estocástica y se modela

mediante un sistema de colas, con el fin de evaluar el impacto del ingreso al sistema de cierto tipo de pacientes.

El programa maestro quirúrgico es un calendario cíclico que define el número y los tipos de quirófanos disponibles en la institución, las horas que las salas estarán abiertas y el servicio o cirujanos (si existe) que han de ser prioritarios para las horas del quirófano. El programa maestro quirúrgico se utiliza como herramienta para responder a las restricciones de capacidad a corto y mediano plazo.

Blake y Donald (2002) con base en su experiencia en el Hospital Monte Sinaí de Toronto plantean un modelo lineal entero donde se definen una variable que representa la duración de la jornada, teniendo en cuenta el tipo de la sala en la que se realizan los procedimientos, el día y hora de la semana en que puede realizarse la programación. Además se establecieron límites según el número de habitaciones, disponibilidad de los cirujanos y el volumen de los pacientes. Antes de proponer este modelo matemático se realizaba la programación de cirugías de forma manual, la velocidad de las respuestas obtenidas con el modelo permiten realizar reprogramaciones de forma rápida y eficiente. El modelo matemático propuesto minimiza las penalidades asociadas a las cirugías que no son atendidas.

Este artículo está dividido de la siguiente forma: en la sección 2 se describe una técnica general empleada para identificar situaciones a resolver en cualquier tipo de situación, seguidamente se comentan los aspectos que se tuvieron en cuenta para justificar la revisión de la ocupación de quirófanos como situación a intervenir a fin de mejorar su eficiencia en cuanto a tiempos de ocupación.

En la sección 3 se definen variables de decisión para plantear un modelo de programación matemático, así como las restricciones asociadas al mismo, en la sección 4 se describe la herramienta utilizada, finalmente se hace una discusión de resultados y se presentan las conclusiones.

## 2. TÉCNICA PARA IDENTIFICAR EL PROBLEMA A SOLUCIONAR

Basados en algunos elementos de la metodología Six Sigma DMAIC (definir, medir, analizar, mejorar y controlar) se implementó la siguiente

sistematización en la recolección de la información para realizar el diagnóstico inicial y pasos a seguir:

1. Identificar la necesidad para realizar el estudio.
2. Realizar sensibilización al personal del proceso.
3. Analizar la documentación del proceso.
4. Realizar diagnóstico del proceso con herramientas. “Definir”.  
¿Se encuentran oportunidades de mejora?  
No. Pare el proceso.  
Sí. Ir al paso 5.
5. Priorizar oportunidades del proceso.
6. Definir Proyecto.
7. Elaborar plan de recolección de datos.  
¿Hay datos suficientes y son válidos?  
No.
8. Recurrir a los analistas para obtener datos usando técnicas de recolección.  
Sí. Ir al paso 9.
9. Identificar y aplicar herramientas. “Medir”.
10. Procesar e interpretar datos con herramientas apropiadas. “Analizar”.
11. Elaborar informe preliminar.
12. Presentar el informe preliminar al responsable del proceso.  
¿Se requieren modificaciones?  
Sí. Ir al paso 13. No. Ir al paso 14.
13. Realizar adiciones, correcciones y/o ajustes al informe preliminar.  
Regresar al paso 12.
14. Socializar informe con el equipo interdisciplinario.
15. Revisar los hallazgos y proponer acciones.  
¿Se generan acciones?  
No, ir al paso 16. Sí, ir al paso 17.
16. Entregar informe a la Dirección de la organización.
17. Identificar y aplicar herramientas. “Mejorar”.
18. Socializar los resultados con Equipos interdisciplinarios de la organización.  
¿Requiere modificaciones?  
Sí, ir al paso 19. No, ir al paso 20.
19. Realizar adiciones, correcciones y/o ajustes al informe preliminar, luego ir al paso 20.
20. Implementar las acciones.
21. Identificar y aplicar herramientas. “Controlar”.
22. Hacer seguimiento a la implementación y los resultados obtenidos.

En el caso específico de análisis de procesos dentro de un ambiente hospitalario se recomienda realizar un análisis inicial que incluya aspectos como: observación directa y entrevistas al personal del proceso, con el fin de identificar los temas de

mayor impacto en el servicio como la cancelación de cirugías, ocupación de quirófanos y programación de cirugías electivas.

Otros aspectos igualmente importantes son: tiempo de ocupación de los quirófanos, tiempo de ocupación de anestesiólogos, cuentas de medicamentos, tiempos de preparación de equipos y materiales, cancelación de cirugías, manejo de sistemas de información, el porcentaje de ocupación real de los quirófanos, tiempos de descanso del equipo humano dentro de la jornada laboral, tiempo del acto quirúrgico, el tiempo de anestesia y recuperación del paciente.

Los análisis de Pareto son de gran utilidad en el momento de revisar aspectos tales como desviaciones de tiempos programados y tiempos reales, servicios de mayor demanda, tiempo real de inicio del servicio, etc.

Para el caso específico de la entidad hospitalaria bajo estudio uno de los aspectos que presentó mayores desviaciones fue el de los tiempos programados de las cirugías contrastados con los tiempos reales para la duración de estas. Con base en este hallazgo se justifica la necesidad de revisar la programación de las salas de cirugía.

Como se muestra en la gráfica [1], los tiempos de inicio están en su mayoría, después de la hora de programación, teniendo retrasos considerables incluso de más de 1 hora.

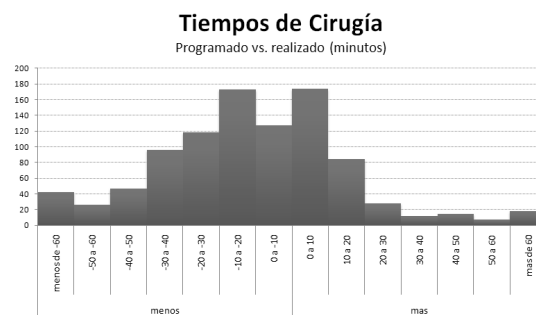


Fig. 1. Diagrama de Pareto de tiempos de cirugía.

### 3. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Zapata (2010) presenta un completo panorama de las herramientas estadísticas como histogramas de frecuencia, estadística descriptiva, análisis de Pareto y gráficos de control.

Para identificar los tipos de cirugía o procedimientos más representativos, el tiempo

promedio de duración del acto quirúrgico y su respectiva especialidad. Se debe revisar previamente la base de datos del quirófano bajo estudio, allí pueden aparecer aspectos como grandes desviaciones que se presentan en el tiempo de duración de un mismo tipo de cirugía por factores que influyen directamente en el procedimiento como son la edad del paciente, el sexo, enfermedades adicionales, entre otros, por tanto deben excluirse los tiempos que presenten un comportamiento atípico y se estima el tiempo estándar de duración de la cirugía con base en una muestra seleccionada.

Para la definición de las variables se debe tener en cuenta además del tiempo quirúrgico, los días en los cuales se programan cirugías electivas (de lunes a viernes). De esta manera se determinó la variable de decisión como  $X_{ij}$ , es decir, cantidad de cirugías ( $X$ ) a programar el día ( $i$ ) de tipo ( $j$ ).

De esta manera y de acuerdo a la cantidad de procedimientos y días disponibles para programar, se establecieron un total de 155 variables, las cuales se listan a continuación:

$i=\{\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}\}$

$j=\{1,2,\dots,31\}$

$j$  varía de acuerdo al procedimiento. Como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1: Número de cirugías por especialidad.

Especialidad	Tipos de procedimientos
Cirugía Pediátrica	7
Otorrinolaringología	5
Cirugía plástica	8
Ginecología	6
Cirugía general	5

$j=1$  puede ser una herniorrafia umbilical que corresponde a un tipo de cirugía pediátrica, para el caso de estudio se consideran 31 tipos de cirugías.

$X_{11} = 5$  indica que el día  $i$  se realizara 5 cirugías del tipo  $j$

### Función objetivo:

El objetivo es maximizar el número de cirugías programadas el día  $i$  del tipo  $j$ . Tal como se presenta en la ecuación (1).

$$\text{Max} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{31} X_{ij} \quad (1)$$

**Restricción de Demanda:** esta restricción hace referencia a la cantidad de cirugías reales realizadas en el periodo sometido a estudio, tal como se muestra en la ecuación (2), donde  $D_j$  representa la demanda semanal de cirugías tipo  $j$  a lo largo de la semana.  $D_j$  un parámetro de entrada y se calcula con base a los datos históricos.

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} \geq D_j \quad (2)$$

$$j=1,2,\dots,31$$

El caso de estudio abordado arrojó que se presenta la ocupación del quirófano en un 60%, por tanto se establecieron estas cantidades como restricciones de mayor o igual ( $\geq$ ) garantizando de esta manera que la cantidad de cirugías que arroje el modelo como solución cumpla por lo menos con las condiciones actuales de ocupación.

**Restricciones de Oportunidad:** esta restricción surge ya que al realizar una revisión en las bases de datos se encontró que la cantidad de cirugías demandadas era mayor a la cantidad de cirugías realizadas en el periodo, lo que hace que las cirugías que no fueron programadas queden como cirugías autorizadas para programar en el periodo siguiente y se representan mediante la ecuación (3). Donde  $O_j$  representa el número total de cirugías demandadas semanalmente por especialidad, teniendo en cuenta las atendidas y las que quedan en lista de espera.

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} \leq O_j \quad (3)$$

$$j=1,2,\dots,31$$

Con la restricción (3) de menor o igual ( $\leq$ ) se garantiza que la programación se ajuste a la cantidad total de cirugías solicitadas por los pacientes, de modo que no se programe más de lo que en realidad se realiza.

**Restricciones de capacidad de quirófano:** Para la restricción de capacidad. Se revisa el dato de horas efectivas disponibles por quirófano, donde  $C_i$  representa el número de horas disponibles diarias para cada tipo de cirugía,  $a_j$  es un parámetro que indica el tiempo necesario para realizar el tipo de cirugía  $j$  esta restricción se presenta en la ecuación (4),

$$\sum_{j=1}^{31} a_j x_{ij} \leq c_i \quad (4)$$

$i=\text{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes.}$

**Restricciones de tiempo contratado de especialistas:** Para la determinación de las restricciones de tiempo en cuanto a la disponibilidad de los especialistas, se debe revisar el tipo de contratación de cada uno, con lo cual se puede determinar la cantidad de horas disponibles de especialista por día.

Para esta restricción se debe tener en cuenta que las especialidades son equivalentes a la cantidad de especialistas. Para el caso de estudio se tomaron en cuenta 5 tipos de especialistas donde  $b$  corresponde al tiempo promedio para ejecutar la cirugía tipo  $j$ , y  $E$  corresponde al número de semanales que labora el especialista, estas restricciones son de la forma que presenta la ecuación (5). Donde  $K$  representa el tipo de especialista para el caso de estudio.

Donde:

$K =$  Cirugía pediátrica, otorrinolaringología, ginecología, cirugía general, cirugía plástica.

$b_{kj}$  representa el tiempo que demora el especialista  $k$  realizando el procedimiento  $j$ .

$E_k =$  tiempo disponible del especialista  $k$  el día  $i$ .

$i =$  lunes, martes, miércoles, jueves, viernes.

$$\sum_{j=1}^{31} b_{kj} X_{ij} \leq E_{ki} \quad (5)$$

**Restricciones de positividad e integralidad:** Con la cual se garantiza que las variables sean mayores o iguales a cero y enteras.

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y enteras} \quad (6)$$

El resultado final es el de un modelo con 155 variables de decisión y 92 restricciones solo considerando 1 quirófano.

#### 4. TÉCNICA DE SOLUCIÓN Y SOFTWARE DE OPTIMIZACIÓN EMPLEADO

##### 4.1 Algoritmo de *Branch and Bound*

La técnica de solución denominada *Branch and Bound* se utiliza para resolver problemas de la programación lineal entera mixta (PLEM).

La idea básica de la metodología es aplicar la estrategia de dividir y conquistar. Como el problema original es bastante difícil de resolver directamente entonces el problema original se subdivide en problemas menores, sucesivamente,

hasta que estos problemas pueden resolverse completamente.

La primera fase consiste en relajar el problema original omitiendo la restricción de integralidad y resolviendo un PL (Problema lineal) a través del método *Simplex*. Luego se divide la región factible de un problema en subregiones menores (*branching*). La conquista o sondaje se realiza encontrando una limitante (*bounding*) de la mejor solución que puede tener un subproblema (solución óptima parcial) que garantice que en este subproblema se encuentra la solución óptima global (Gallego *et al.*, 2007).

##### 4.2 AMPL

La dificultad en aplicaciones de la vida real en cuanto a los problemas de optimización reside en dos aspectos: el primero en que las empresas de nuestro entorno no están dispuestas a invertir en este tipo de investigaciones. El segundo en que los problemas resultantes son de gran tamaño y los softwares en sus versiones gratuitas no resuelven este tipo de instancias por la limitante de tamaño, así que las organizaciones deben entrar a invertir en compra de software costosos o en desarrollos que involucren altos costos de mano de obra.

Aparece entonces el AMPL (*A Modeling Language for Mathematical Programming*) como una alternativa que permite correr problemas sin restricciones de tamaño tanto lineales como lineales enteros. Gracias a esto, el modelo resultante se corrió en el programa AMPL.

Para la solución del modelo matemático planteado para la programación de cirugías electivas, se utilizó el tipo de solver CPLEX que resuelve problemas lineales y no lineales cuadráticos, continuos o enteros, el cual utiliza el método Simplex, métodos de Punto Interior y *Branch and Bound*.

AMPL arroja una solución general para el modelo de programación lineal entera planteado, dando como resultado la cantidad total de cirugías que se deben realizar.

Además se pueden visualizar las holguras y los valores duales para cada restricción, permitiendo hacer un análisis de sensibilidad al modelo.

Teniendo en cuenta estos resultados, se calculó el tiempo demandado tanto por tipo de cirugía como por especialidad, con el fin de verificar el



cumplimiento de la restricción de capacidad del quirófano y se calculó el porcentaje de ocupación que tendría el quirófano en caso de cumplir con los resultados arrojados por el modelo.

## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para una mayor comprensión sobre los resultados arrojados por el programa AMPL, se redefinió la variable  $X_{ij}$ , de la siguiente manera: Como  $i$  varía de 1 a 5 y hace referencia a los días de la semana, al de introducir los datos en el AMPL se tiene que: 1=lun, 2=mar, ..., 5=vie. Del mismo modo para  $j$  que varía de 1 a 31 se tiene que: 1=TIP1, 2=TIP2, ..., 31=TIP31. Tal como se muestra en la tabla 2.

*Tabla 2: Salida del software AMPL*

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
TIP1	0	14	2	0	19
TIP2	0	16	0	0	1
TIP3	0	0	11	0	5
TIP4	0	11	0	0	1
TIP5	0	2	7	0	0
TIP6	0	27	0	0	0
TIP7	0	1	0	15	0
TIP8	0	11	0	0	0
TIP9	0	26	0	0	0
TIP10	0	4	0	0	6
TIP11	0	0	0	0	6
TIP12	0	2	0	0	0
TIP13	0	5	0	0	0
TIP14	11	4	2	32	0
TIP15	0	1	1	0	4
TIP16	16	1	0	0	0

Teniendo en cuenta los resultados del modelo, se calculó el tiempo demandado tanto por tipo de cirugía como por especialidad, con el fin de verificar el cumplimiento de la restricción de capacidad del quirófano.

Según el resultado obtenido como óptimo del modelo, se plantea que el quirófano debería ser programado en su mayoría con cirugías pediátricas con un 27.32%, seguido por otorrinolaringología y ginecología con 25.37 y 24.81% respectivamente y en una menor proporción cirugía plástica y cirugía general con 14.44 % y 8.07%.

Para validar el modelo frente al cumplimiento de las restricciones de capacidad por día, se calculó el tiempo demandado por las cirugías según el modelo y se comparó frente al disponible por día, Con lo cual se tendría una ocupación del 100% de lunes a viernes.

Analizando dicha programación según especialidad, se observa que la ocupación del quirófano para los días lunes debería ser del 100% con ginecología, los martes el 43% otorrinolaringología, 41% con cirugía plástica, 8% con ginecología y 9% con cirugía general; para los miércoles el 52% de las cirugías serían de cirugía pediátrica, 21% cirugía general, 20% otorrinolaringología y 6% ginecología; los jueves presentarían un 52% para cirugía pediátrica, 43% para ginecología y un 5% para cirugía plástica; finalmente los días en los días viernes la ocupación se distribuiría con un 77% para otorrinolaringología, 20% cirugía plástica y un 2% para ginecología. Esto indica que el número de especialidades a ser programadas por día debe ser lo más homogéneo posible.

## 6. CONCLUSIONES

Se propuso una técnica basada en elementos de Six Sigma DMAIC para sistematizar la recolección y la validación de la información insumo en la propuesta del modelo matemático.

Se desarrolló un modelo matemático que permite establecer un programa maestro quirúrgico semanal por sala de quirófano y cuyo objetivo es maximizar la eficiencia de utilización de los recursos disponibles.

De acuerdo a los análisis de ocupación realizados y a los datos sobre procedimientos, especialidad, tiempo quirúrgico y jornadas contratadas de especialistas, se lograron identificar las variables y restricciones que están directamente involucradas en la formulación del problema lineal entero para maximizar la ocupación de quirófanos.

Las herramientas como histogramas de frecuencia, estadística descriptiva, análisis de Pareto y gráficos de control fueron de mucha utilidad para calcular los parámetros del modelo. La metodología de gráficos de control con la que se excluyeron datos atípicos y el balanceo de línea para estimar las cargas en diferentes franjas horarias brindaron una mayor confiabilidad en la información obtenida.

Se recomienda extender el análisis a todos los quirófanos involucrando una variable adicional (l) la cual haría referencia a la jornada quirúrgica (mañana o tarde) de manera que el modelo se adapte mejor a las condiciones propias del proceso.

## REFERENCIAS

- Aoki Nepote, María Elena; Urbano Monteiro, Ilza y Hardy Ellen (2009). La asociación entre los índices operacionales y la tasa de ocupación de un centro quirúrgico general. *Revista Latino-Americana de Enfermagem*. Vol 17. No 4.
- American Society For Quality, Define Measure Analyze Improve Control (DMAIC). Disponible el Internet: <<http://asq.org/learn-about-quality/six-sigma/overview/dmaic.html>> [Con acceso el 2012-02-21]
- Blake, John and Donald, Joan. (2002). Mount Sinai Hospital Uses Integer Programming to Allocate Operating Room Time. *Interfaces* Vol32. No 2 63-73.
- Chacon, Y. Chacon, Lenis Berrios, M. (2010). Productividad en la emergencia de los Servicios Médicos Odontológicos en universidades públicas. *Revista de Ciencias Sociales*, vol.16, no.3, p.506-514.
- Duque, Pedro Luis (2000). Lenguaje AMPL. Versión: 2ª. Disponible en Internet:<<http://destio.us.es/calvo/ampl2a.pdf>> [con acceso el 2012-05-18].
- Folmer, K., Mot, E. (2003). Diagnosis and Treatment Combinations in Dutch Hospitals. Tech. rep.
- Gallego R., Escobar A., Romero R. (2007). Programación Lineal Entera. 1ª Edición. Taller de publicaciones Universidad Tecnológica de Pereira.
- Hincapié, D. Ospina, J. Grisales, H. Arroyave, M. Valencia M. González, G. (2004) Análisis Markoviano de un proceso de estancia hospitalaria en un hospital de tercer nivel de complejidad. *Revista de la Facultad Nacional de Salud Pública*. Número 001. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia, pp. 61-72.
- Vanberkel, P.T. *et al.* (2011). Optimizing the strategic patient mix: Memorandum 1935. Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede.
- Zapata, Carlos J. (2010). Análisis probabilístico y simulación. Grupo de investigación en planeamiento de sistemas eléctricos. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira – Colombia.